Il linguaggio della relatività: le geometrie non euclidee

Luca Lussardi
Università Cattolica del Sacro Cuore

Einstein 1916-2016
Università degli Studi di Brescia
6 Aprile 2016

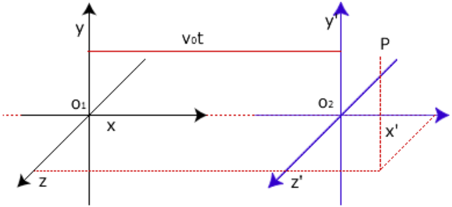
Non sono certo che la geometria differenziale
sia la struttura adatta per ulteriori progressi,
ma, se lo è, credo di essere sulla strada giusta
Albert Einstein (1879-1955)

Le prime riflessioni: la relatività ristretta (1905)

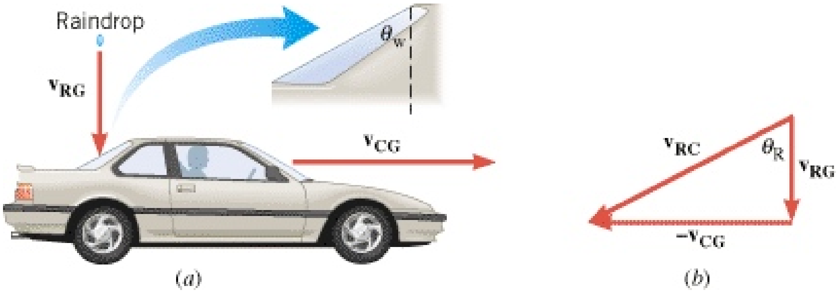
- Meccanica (Newton)
- Elettromagnetismo (Maxwell)

La teoria di Maxwell prevede che il campo elettromagnetico si propaghi nel vuoto con velocità costante c

Ciò è in contraddizione con le trasformazioni di Galileo:

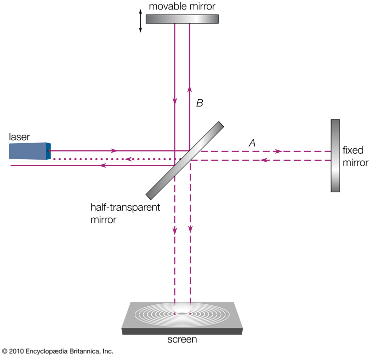


$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t \end{cases} \Rightarrow v_0 + v' = v$$



Raindrop
$\mathbf{v}_{RG}$
θ_w
$\mathbf{v}_{CG}$
(a)
$\mathbf{v}_{RC}$
θ_R
$\mathbf{v}_{RG}$
$-\mathbf{v}_{CG}$
(b)

La soluzione classica è l'etere luminifero, mezzo di propagazione del campo elettromagnetico che non offre alcuna resistenza meccanica al moto dei corpi in esso immersi. Ma:



Michelson-Morley (1887)

Risultato:

- O la terra è ferma rispetto all'etere
- O la velocità della luce è la stessa in ogni direzione

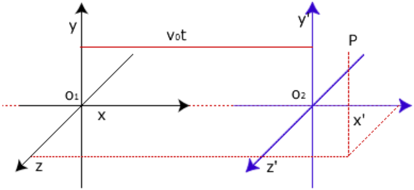
Einstein accetta la seconda ipotesi, e postula che:

- Le leggi della fisica devono essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali
- La velocità della luce nel vuoto è costante, non dipende dallo stato di moto della sorgente né dallo stato di moto dell'osservatore

In particolare:

- La meccanica va riscritta perchè la relatività galileiana viola il secondo postulato
- L'elettromagnetismo è consistente e dunque le trasformazioni corrette di spazio e di tempo devono rendere invarianti le equazioni di Maxwell

Le trasformazioni di Lorentz



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v_0 t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - v_0 x/c^2) \end{cases} \quad , \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Conseguenze:

Dilatazione delle lunghezze, dilatazione del tempo, . . .

Osserviamo che se

$$(x, y, z, t), \quad (x', y', z', t')$$

sono due punti dello spazio-tempo allora se calcoliamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

usando le formule inverse

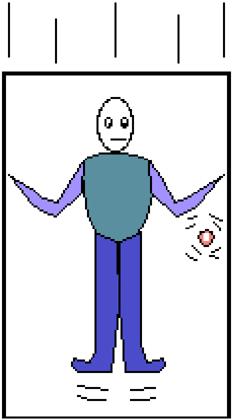
$$x = \gamma(x' + v_0 t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + v_0 x'/c^2)$$

troviamo

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \\ = \gamma^2 (x')^2 + \gamma^2 v_0^2 (t')^2 + 2\gamma x' v_0 t' + (y')^2 + (z')^2 \\ -c^2 \gamma^2 (t')^2 - \gamma^2 v_0^2 (x')^2 / c^2 - 2\gamma t' v_0 x' \\ = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 (t')^2 \end{gathered}$$

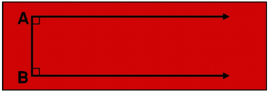
La quantità $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ è quindi invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz: la meccanica si trasforma in geometria!

Cadiamo insieme all'ascensore: il principio di equivalenza

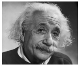


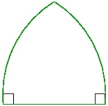
La gravità è matematicamente equivalente ad un riferimento accelerato: è sempre possibile scegliere un riferimento rispetto al quale gli effetti del campo gravitazionale sono nulli

Che fine fa la forza di gravità? Einstein vs Newton

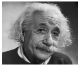


 Tra i due corpi non c'è alcuna forza!

 I due corpi si muovono su un piano seguendo le linee più "convenienti"!

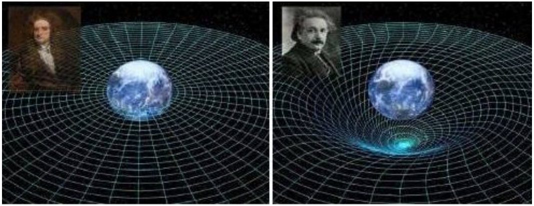


 Tra i due corpi c'è una forza di attrazione!

 I due corpi si muovono in uno spazio curvo seguendo le linee più "convenienti"!

L'universo geometrico di Einstein

- La geometria dello spazio è determinata dalle masse in esso presenti
- e determina, attraverso le *equazioni di Einstein*, il moto dei corpi che in esso si muovono
- lungo le traiettorie più convenienti (principio di inerzia), le cosiddette *geodetiche*



L'universo fisico e piatto di Newton contrapposto all'universo geometrico e piegato dalla gravità di Einstein

Da dove ha origine la concezione geometrica di Einstein?

Torniamo un po' indietro nel tempo . . . (300 a. C.)

La Scuola di Atene (Raffaello, Musei Vaticani)

PROPOSIT. XLVII.

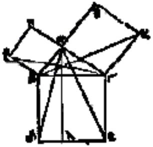
Theorema.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις· τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In triangulis rectangulis: quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

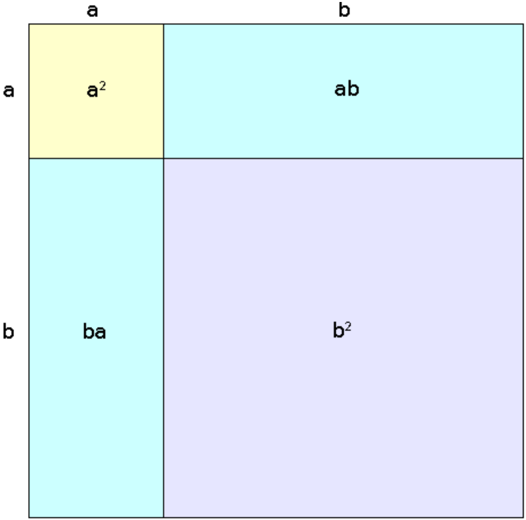
ἡ ἔκθεσις.

Sit triangulus rectangulus αβγ, habens an-



gulum βαγ rectum. ὁ διορισμός. Dico quod quadratum lateris βγ, est æquale quadratis laterum βα, αγ. ἡ κατασκευή. Describatur à linea βγ, quadratum βδεγ. Item à linea βα quadratum βη. Præterea à linea αγ quadratum γθ. Ducatur per punctum α, alterutri linearum βδ, γε, æquedistans recta linea αλ. Ducantur duæ lineæ rectæ αδ, ζγ.

Gli Elementi: anche l'algebra è geometria

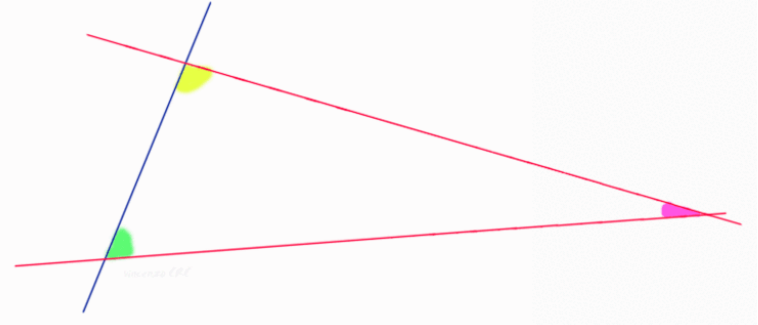


I primi quattro assiomi della geometria piana e . . .

- Per due punti distinti si può condurre una ed una sola retta
- Si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente
- Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
- Tutti gli angoli retti sono uguali

. . . il quinto postulato

Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti

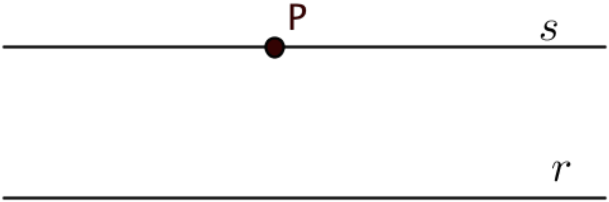


Ovvero nella sua formulazione moderna . . .

Dati una retta r ed un punto P non appartenente a r

esiste una ed una sola

retta s passante per P che non incontra r

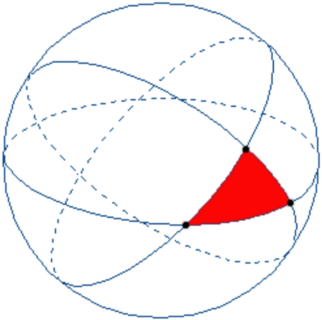


I primi tentativi: Bolyai e Lobacevskij (metà Ottocento)


La nascita della geometria non-euclidea

L'esempio più facile l'abbiamo sempre avuto sotto i piedi

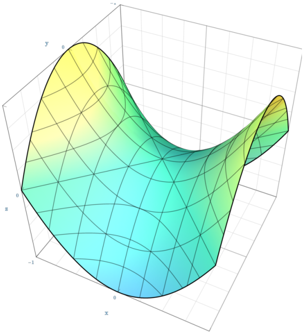
La superficie terrestre, approssimabile alla superficie di una sfera, costituisce, dopo un'opportuna definizione di *punto* e di *retta*, un modello di *piano ellittico*, sul quale le rette si incontrano sempre



Nella geometria ellittica della sfera non esiste il parallelismo

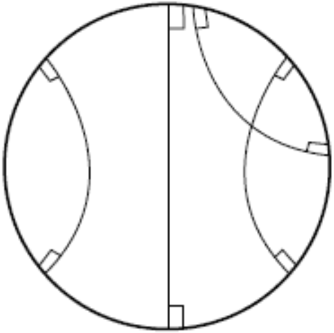
Il parallelismo in geometria iperbolica

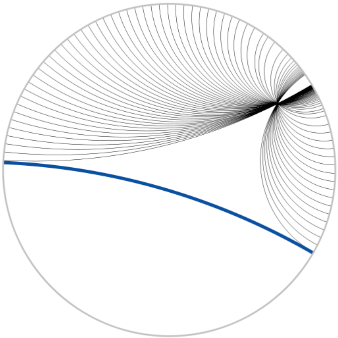
Il parallelismo per la geometria iperbolica è del tutto contrapposto a quello della geometria ellittica: infatti, sopra una superficie iperbolica tipicamente accade che fissati una retta ed un punto esterno ad essa ci sono infinite rette parallele alla retta data e passanti per il punto dato



Tipica superficie iperbolica a forma di sella

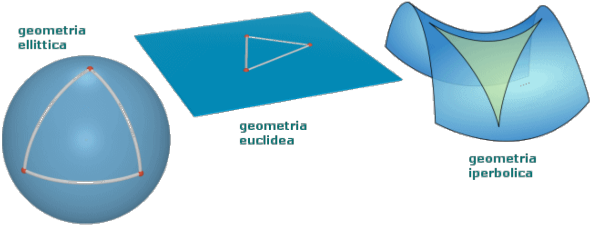
Il disco di Poincaré





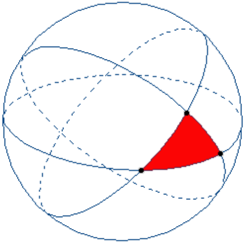
Dalle rette parallele alla curvatura

La superficie di una sfera è un esempio di spazio geometrico a *curvatura positiva*, e per questi spazi geometrici non è più vero che la somma degli angoli interni ad un triangolo è un angolo piatto, bensì risulta essere maggiore di un angolo piatto: una tale geometria viene anche detta *ellittica*. In modo analogo, per gli spazi geometrici a *curvatura negativa* la somma degli angoli interni ad un triangolo risulta essere minore di un angolo piatto; una tale geometria viene anche detta *iperbolica*

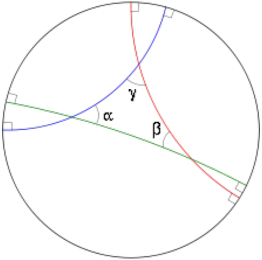


Classificazione delle geometrie

Triangoli sulla sfera . . .

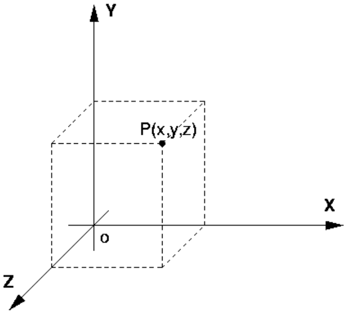


. . . e sul disco di Poincaré



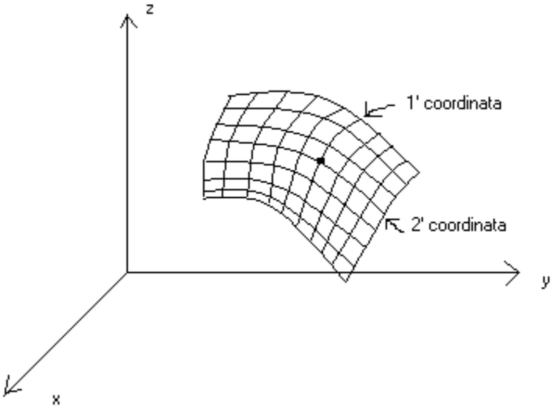
Coordinatizzazione: i sistemi di riferimento

Coordinatizzare uno spazio geometrico: le coordinate *locali* sopra uno spazio geometrico non sono altro che la naturale generalizzazione delle ben note coordinate cartesiane ortogonali della geometria analitica usuale



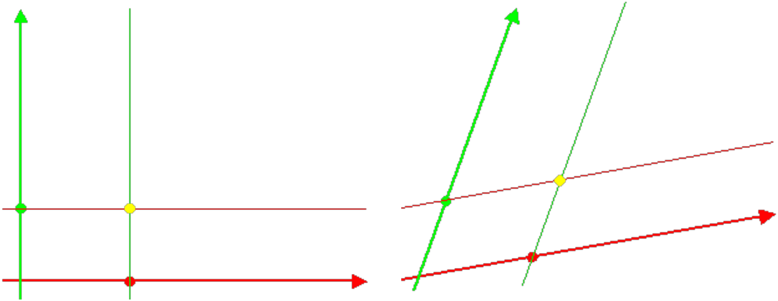
Nello spazio euclideo ordinario il punto P ha tre coordinate cartesiane ortogonali, x, y, z, rispetto al riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$

Le coordinate curvilinee (locali)

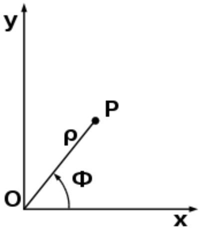


Coordinate locali sopra una superficie: ogni punto è determinato da una coppia di numeri reali (x, y)

Ci sono infiniti modi per assegnare le coordinate al punto P:

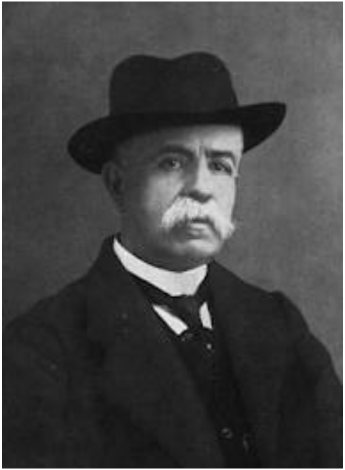


Coordinate cartesiane ortogonali nel piano
e coordinate oblique piane



Coordinate polari nel piano

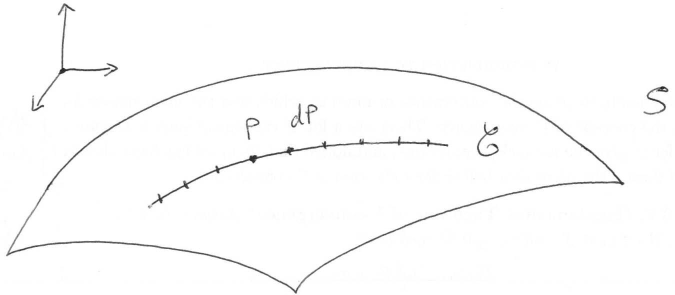
Alla ricerca di un calcolo "assoluto"



Ricci Curbastro e Levi Civita: il calcolo differenziale assoluto

Il ds^2: l'universo geometrico di Einstein prende forma

Supponiamo di avere una curva $\mathcal{C}$ tracciata sopra una superficie $\mathcal{S}$ nello spazio ordinario e di volerne determinare la lunghezza



Sommiamo tutte le lunghezze degli archettini P-dP, punti "molto vicini" tra loro

Se x, y sono le coordinate locali usate per descrivere $\mathcal{S}$ e dx e dy sono i piccoli incrementi delle coordinate x, y, quando passiamo da P a dP abbiamo:

$$x \to x + dx, \quad y \to y + dy.$$

Dunque

$$ds^2 := \text{lunghezza dell'archettino } P\text{-}dP$$
$$= g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

per certi coefficienti numerici g_{11}, g_{12} e g_{22}, che dipendono da x e y.

Se $\mathcal{S}$ fosse un piano euclideo si troverebbe, in coordinate cartesiane ortogonali, $g_{11} = g_{22} = 1$ e $g_{12} = 0$, ovvero

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

che è il Teorema di Pitagora

Uno può ripetere lo stesso ragionamento esposto poco fa per calcolare ds^2 usando altre coordinate locali $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$$ds^2 = \overline{g}_{11} d\bar{x}^2 + 2\overline{g}_{12} d\bar{x} d\bar{y} + \overline{g}_{22} d\bar{y}^2$$

per certi nuovi coefficienti $\bar{g}_{11}, \bar{g}_{12}, \bar{g}_{22}$ dipendenti da $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e in generale diversi da g_{11}, g_{12}, g_{22}.

Esempio:

$$ds^2 = 2dx^2 - 3dxdy + dy^2 = -d\bar{x}^2 + d\bar{x}d\bar{y} + 4d\bar{y}^2$$

In generale:

$$\boxed{g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 = \overline{g}_{11}d\bar{x}^2 + 2\overline{g}_{12}d\bar{x}d\bar{y} + \overline{g}_{22}d\bar{y}^2}$$

che è l'*invarianza dell'espressione differenziale*

$$g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

Esempio:
Non può accadere che passando dalle coordinate locali x, y alle coordinate locali $\bar{x}, \bar{y}$ nell'espressione differenziale

$$dx^2 - dxdy + 3dy^2$$

si ottenga l'espressione differenziale

$$2d\bar{x}^2 + d\bar{x}d\bar{y} - 2d\bar{y}^2 + d\bar{x}^3$$

L'invarianza formale

$$\boxed{g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 = \overline{g}_{11}d\bar{x}^2 + 2\overline{g}_{12}d\bar{x}d\bar{y} + \overline{g}_{22}d\bar{y}^2}$$

equivale a dire, per definizione, che il complesso dei coefficienti g_{11}, g_{12}, g_{22} è un *tensore*, detto anche *tensore metrico*

Conosciamo già un ds^2

Quando abbiamo parlato di relatività ristretta e di trasformazioni di Lorentz nello spazio-tempo risultava

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - c^2 d\bar{t}^2$$

Il "ds^2" della relatività ristretta è dato da

$$ds^2 := dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

in altre parole

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{44} = -c^2$$

e

$$g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$$

Ricostruiamo la geometria

- Se esiste una scelta di coordinate x, y tali per cui si abbia ovunque $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$ allora siamo in geometria euclidea;
- in caso contrario, siamo in presenza di spazi geometrici non euclidei;
- una opportuna formula che coinvolge il tensore metrico fornisce poi la curvatura dello spazio in questione, permettendo così di determinare di che tipo di geometria non euclidea si tratta: ad una curvatura positiva corrisponde una geometria ellittica, mentre ad una curvatura negativa corrisponde una geometria iperbolica;
- siccome la conoscenza del tensore metrico permette anche la determinazione della lunghezza delle curve tracciate nello spazio geometrico, si possono anche scrivere le equazioni delle linee di minima lunghezza, ovvero le geodetiche

Albert Einstein nell'invarianza tensoriale vede la chiave per la teoria della relatività generale

…e torniamo ad Einstein

- L'invarianza formale delle espressioni differenziali rispetto ai cambiamenti di coordinate suggerisce a Einstein che le leggi fisiche vanno scritte in termini di coefficienti tensoriali: l'universo fisico è un mondo descritto da sistemi di riferimento e le leggi fisiche devono essere le stesse in ogni sistema di riferimento, proprio come gli spazi geometrici dei matematici sono descritti da sistemi di coordinate, e le espressioni invarianti a coefficienti tensoriali hanno la stessa "forma" in ogni sistema di coordinate;
- Il tensore metrico permette di ricostruire l'intera geometria dello spazio, siccome permette di misurare le distanze; l'universo curvo della mente di Einstein prende la forma desiderata: le masse permettono di determinare il tensore metrico attraverso le equazioni di Einstein, e lo studio geometrico-differenziale dello spazio così individuato permette di determinare i moti dei corpi in esso.